ECUACIONES DIFERENCIALES
(Grupo A)

Teoría Fundamental

En esta parte del curso nos dedicaremos a establecer los resultados teóricos fundamentales del curso. Nos interesaremos por las condiciones de existencia y de unicidad de la solución, la determinación del dominio de definición de la solución y por la dependencia continua de ésta con respecto a los datos. En la última sección estudiaremos la estabilidad de las soluciones.

El esquema del capítulo es el siguiente:

1. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

2. SOLUCIONES MAXIMALES

3. DEPENDENCIA CONTINUA DE LOS DATOS

4. ESTABILIDAD

1. Existencia y unicidad de la solución

Recordamos aquí algunos conceptos así como los resultados de existencia y unicidad (probablemente) introducidos en el curso anterior .

1.1. La condición de Lipschitz.

Definición 1.1. *Sean I un intervalo de $I\!R$ y $\mathcal{O}$ un dominio de $I\!R^n$, una función $f(t,x) \in \mathcal{C}^0(I \times \mathcal{O}; I\!R^{\rm n})$ es* **lipschitziana** *respecto a la variable x si existe una constante L tal que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\| \quad \textit{para todo } t \in I \textit{ y todo } (x,y) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}.$$

L se denomina constante de Lipschitz de la función f en $I \times \mathcal{O}$.

Diremos que f es **localmente lipschitziana** *respecto a la variable x en $I \times \mathcal{O}$ si para cualquier intervalo compacto $J \subset I$ y para cualquier compacto $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$, f es lipschitziana en $J \times \mathcal{A}$.* $\square$

Nota 1. *Dado que en $I\!R^n$ todas las normas son equivalentes, la lipschitzianidad de una función f no depende de la norma elegida. En todo lo que sigue podremos suponer que trabajamos con la norma euclídea, para $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in I\!R^n$*

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \right)^{1/2} \overset{(notada)}{=} \|z\|_2. \quad \square$$

Nota 2. *Uno podrá comprobar fácilmente que si una función $f(t,x) \in \mathcal{C}^0(I \times \mathcal{O}; I\!R^{\rm n})$ y es continuamente diferenciable en x_i para $i = 1, 2, \cdots, n$ sobre $I \times \mathcal{O}$ entonces esta función es localmente lipschitziana sobre $I \times \mathcal{O}$.* $\square$

1.2. Existencia global y unicidad.

Teorema 1.2. *Sea f una función de $\mathcal{C}^0([a,b] \times I\!R^{\rm n}; I\!R^{\rm n})$, lipschitziana con respecto a x en $[a,b] \times I\!R^n$, entonces, para cualquier $(t_0, x_0) \in [a,b] \times I\!R^n$ existe una única solución del problema de valor inicial*

$$\left\{ \begin{array}{ll} x' = f(t,x) & \textit{para } t \in [a,b], \\ x(t_0) = x_0. & \square \end{array} \right. \tag{1}$$

Para la demostración de este teorema necesitaremos el teorema del punto fijo de Banach que recordamos a continuación:

Teorema 1.3. *(teorema de la aplicación contractiva/punto fijo de Banach/Picard) Sea $\mathcal{M}$ un espacio métrico completo, sea $T : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ una aplicación contractiva, i.e., existe $k < 1$ tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq k d(x,y)$$

para todo x, $y \in \mathcal{M}$. Entonces T admite un único punto fijo ξ y para todo $\xi_0 \in \mathcal{M}$ la sucesión $(\xi_n)_{n \in N}$, donde $\xi_{n+1} = T(\xi_n)$, converge a ξ. Además,

$$d(\xi_n, \xi) \leq \frac{k^n}{1-k} d(\xi_1, \xi_0).$$

Demostración.

Consideremos el término $d(\xi_{i+1}, \xi_i)$, tenemos:

$$d(\xi_{i+1}, \xi_i) = d(T(\xi_i), T(\xi_{i-1})) \leq k d(\xi_i, \xi_{i-1})$$

por lo que deducimos:

$$d(\xi_{i+1}, \xi_i) \leq k^i d(\xi_1, \xi_0). \tag{2}$$

Por otra parte, suponiendo $n > m$, de la desigualdad triangular deducimos que

$$d(\xi_n, \xi_m) \leq d(\xi_n, \xi_{n-1}) + d(\xi_{n-1}, \xi_{n-2} + \ldots + d(\xi_{m+1}, \xi_m))$$

luego, aplicando (2) a cada uno de los términos de la parte derecha de la anterior desigualdad tenemos:

$$\begin{aligned} d(\xi_n, \xi_m) &\leq k^{n-1} d(\xi_1, \xi_0) + k^{n-2} d(\xi_1, \xi_0) + \ldots + k^m d(\xi_1, \xi_0) \\ &= (k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots + k^m) d(\xi_1, \xi_0) = \frac{k^m - k^n}{1-k} d(\xi_1, \xi_0) \end{aligned}$$

luego deducimos que, para $n > m$,

$$d(\xi_n, \xi_m) \leq \frac{k^m}{1-k} d(\xi_1, \xi_0) \tag{3}$$

por lo que $(\xi_n)_{n \in N}$ es una sucesión de Cauchy por lo que tiene un límite, que notaremos ξ en el espacio completo $\mathcal{M}$. Dado que $\xi_{n+1} = T(\xi_n)$, dejando tender n al infinito obtenemos $\xi = T(\xi)$, luego T tiene un punto fijo. Este es único, en efecto, supongamos que ξ y ζ son puntos fijos entonces

$$d(\xi, \zeta) = d(T(\xi), T(\zeta)) \leq k d(\xi, \zeta)$$

con $k < 1$ lo cual es imposible si $d(\xi, \zeta) \neq 0$, luego $\xi = \zeta$. La estimación del teorema se deduce de (3) cuando n tiende a infinito. **Q.E.D.**

Podemos deducir el siguiente resultado:

Corolario 1.4. *Sea $\mathcal{M}$ un espacio métrico completo, sea $T : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ una aplicación tal que para algún $m \in \mathbb{N}$ T^m sea contractiva. Entonces T admite un único punto fijo ξ*

Demonstración: Aplicando el anterior teorema sabemos que T^m tiene un único punto fijo ξ, $\xi = T^m(\xi)$. Aplicandp T a cada parte de la igualdad tenemos:

$$T(\xi) = T(T^m(\xi)) = T^{m+1}(\xi) = T^m(T(\xi))$$

por lo que se deduce que $T(\xi)$ es punto fijo de T^m, luego, por la unicidad del punto fijo, tenemos $\xi = T(\xi)$, i.e. ξ es punto fijo de T. Además es el uńico punto fijo de T ya que todo punto fijo de T es punto fijo de T^m. **Q.E.D.**

Demostración del teorema 1.2

Consideremos el espacio $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}^n)$ dotado de la norma

$$\|\phi\| = \max_{t\in[a,b]} \|\phi(t)\|. \tag{4}$$

Se comprueba fácilmente que $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banack (i.e. es un espacio vectorial completo para la topología de la norma).

Sea la aplicación

$$\Phi:\ \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}^n)$$

definida por

$$\Phi(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds$$

para todo $y \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}^n)$. *Vamos a demostrar que Φ tiene un único punto fijo para lo cual demostraremos que para cierto entero m Φ^m es una contracción.* Sean y y z dos funciones de $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}^n)$, tenemos

$$\begin{aligned} \|\Phi(y(t)) - \Phi(z(t))\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s,y(s)) - f(s,z(s)))ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s,y(s)) - f(s,z(s))\| ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|y(s) - z(s)\| ds \right| \end{aligned} \tag{5}$$

De (5) deducimos

$$\|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\| \leq L|t-t_0| \|y-z\| \tag{6}$$

que es el caso $m = 1$ de la desigualdad más general:

$$\|\Phi^m(y)(t) - \Phi^m(z)(t)\| \leq \frac{L^m|t-t_0|^m}{m!} \|y-z\|. \tag{7}$$

Supongamos cierta esa desigualdad para m e intentemos deducirla para $m+1$. Aplicando (5):

$$\begin{aligned} &\|\Phi^{m+1}(y)(t) - \Phi^{m+1}(z)(t)\| \\ &\qquad = \|\Phi\left(\Phi^m(y)\right)(t) - \Phi\left(\Phi^m(z)\right)(t)\| \\ &\qquad\qquad \leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|\Phi^m(y)(s) - \Phi^m(z)(s)\| \, ds \right| \end{aligned} \tag{8}$$

y aplicando (7)

$$\begin{aligned} &\|\Phi^{m+1}(y)(t) - \Phi^{m+1}(z)(t)\| \\ &\qquad \leq \frac{L^{m+1}}{m!} \left| \int_{t_0}^{t} |s-t_0|^m ds \right| \|y-z\| \\ &\qquad\qquad = \frac{L^{m+1}|t-t_0|^{m+1}}{(m+1)!} \|y-z\| \end{aligned} \tag{9}$$

por lo que (7) queda demostrado para todo entero $m \in I\!N$.

Más aún, dado que $|t - t_0| \leq b - a$ tenemos:

$$\|\Phi^m(y)(t) - \Phi^m(z)(t)\| \leq \frac{L^m(b-a)^m}{m!}\|\!|y - z|\!\| \quad \text{para todo } t \in [a,b],$$

luego, aplicando (4) tenemos

$$\|\!|\Phi^m(y) - \Phi^m(z)|\!\| \leq \frac{L^m(b-a)^m}{m!}\|\!|y - z|\!\|. \tag{10}$$

Como

$$\frac{L^m(b-a)^m}{m!} \to 0 \quad \text{cuando } m \to \infty,$$

existe $m_0 \in I\!N$ tal que para todo $m \geq m_0$ tengamos

$$\frac{L^m(b-a)^m}{m!} \leq \frac{1}{2},$$

luego

$$\|\!|\Phi^{m_0}(y) - \Phi^{m_0}(z)|\!\| \leq \frac{1}{2}\|\!|y - z|\!\|$$

para todo par $(y,z) \in \mathcal{C}^0([a,b]; I\!R^{\mathrm{n}}) \times \mathcal{C}^0([a,b]; I\!R^{\mathrm{n}})$.

Al ser Φ^{m_0} una contracción el teorema de punto fijo de Picard permite deducir que Φ tiene un único punto fijo $x \in \mathcal{C}^0([a,b]; I\!R^{\mathrm{n}})$, i.e. $x = \Phi(x)$ luego:

$$x(t) = \Phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \quad \text{para todo } t \in [a,b]$$

y es solución del problema de valor inicial (1). Además la unicidad del punto fijo garantiza que x es la única solución de (1) dado que cualquier solución sería punto fijo de Φ. **Q.E.D.**